Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da Lista de Exercícios sobre Combinações com repetição

1. De quantas maneiras podemos distribuir 6 laranjas entre 2 pessoas?

   ***R*esposta:** Denominemos as pessoas de a e b. O total de distribuições é igual ao número de soluções inteiras e não negativas de $a + b = 6$. Portanto, temos $CR_2^6 = C(6 + 2 - 1, 6) = C(7, 6) = 7$.

2. Queremos comprar 12 docinhos. De quantas maneiras os podemos escolher se têm 8 variedades diferentes de docinhos?

   ***R*esposta:** Existem 8 tipos de doce, seja x_i o número de docinhos do tipo i que foram comprados.

   Logo,

   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 12 \\ x_i \geq 0,\ \forall 1 \leq i \leq 8 \end{aligned}$$

   Podemos comprar os doces de $CR_8^{12} = C(8 + 12 - 1, 12) = C(19, 12)$ formas distintas.

3. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

   ***R*esposta:** Dado um grupo de 20 bolas, temos que particionar estas bolas em 5 grupos onde nenhum ficará vazio. Imaginemos que estas bolas estejam dispostas em fila, para particionar a fila em 5 grupos devemos escolher 4 espaços na fila para secciona - la. Note que temos 19 espaços entre bolas na fila, portanto o total de distribuições das bolas nas caixas é $C(19,4) = 3876$.

4. Quantas são as soluções inteiras não negativas de $x + y + z < 10$?

   Observação: Uma possibilidade para resolver este problema é incorporar à soma uma outra variável, u, e considerar a igualdade. Coloque a restrição sobre u para que os dois problemas sejam equivalentes. Tente resolver a questão usando outro raciocínio.

   ***R*esposta:** Note que o número de soluções inteiras não negativas deste problema é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $x+y+z \leq 9$, e por sua vez esta inequação tem o mesmo número de soluções inteiras não negativas de $x + y + z + u = 9$.

   O total de soluções inteiras e não negativas de $x+y+z+u = 9$ é $CR_4^9 = C(4+9-1,9) = C(12,9) = 220$.

5. Quantas são as soluções inteiras positivas de $x + y + z < 10$?

   ***R*esposta:** Fazendo as seguintes transformações de variáveis: $x^* = x-1$, $y^* = y-1$ e $z^* = z-1$, temos $x^*+y^*+z^* < 7$. Procedendo como na questão anterior, devemos calcular o número de soluções inteiras não negativas de $x^* + y^* + z^* + u = 6$ que é $CR_4^6 = C(4+6-1,6) = C(9,6) = 84$.

6. Quantos números inteiros entre 1 e 100000 têm soma dos algarismos igual a 6? Observação: Associe, por exemplo, o número 1 à seqüência 00001.

   ***R*esposta:** Primeiro notemos que a soma dos algarismos de 100000 não é 6, logo consideraremos números entre 1 e 99999, e convencionaremos que qualquer número será representado por uma seqüência de 5 dígitos.

   Representaremos um número qualquer por $abcde$. Devemos ter $a+b+c+d+e = 6$, com a, b, c, d, e inteiros não negativos. Logo, o total de números é $CR_5^6 = C(5+6-1,6) = C(10,6) = 210$.

7. Quantos números inteiros entre 1 e 1000 inclusive têm a soma dos dígitos menor que 7?

   ***R*esposta:** Tanto o número 1000 como o número 0 tem a soma dos dígitos menor que 7, associaremos portanto a seqüência 000 ao número 1000. Representaremos os números por seqüências de 3 dígitos abc, procederemos agora como no ítem anterior.

   O total de números é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $a + b + c \leq 6$, isto é, $a + b + c + u = 6$ e o total de soluções inteiras não negativas desta equação é $CR_4^6 = C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = 84$.

8. Quantas soluções inteiras existem para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ tais que $1 \leq x_1 \leq 6$, $1 \leq x_2 \leq 7$, $1 \leq x_3 \leq 8$, $1 \leq x_4 \leq 9$.

   ***R*esposta:** Inicialmente, faremos a seguinte mudança de variáveis.

   $x_1^* = 6$ - x_1, $x_2^* = 7$ - x_2, $x_3^* = 8$ - x_3 e $x_4^* = 9$ - x_4. Devido as restrições sobre as variáveis x_i, teremos as seguintes restrições para as variáveis x_i^*: $0 \leq x_1^* \leq 5$, $0 \leq x_2^* \leq 6$, $0 \leq x_3^* \leq 7$, $0 \leq x_4^* \leq 8$. Devemos portanto calcular o número de soluções da seguinte equação:

$$\begin{array}{lcl} 6 - x_1^* + 7 - x_2^* + 8 - x_3^* + 9 - x_4^* & = & 20 \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* & = & 10 \end{array}$$

   Note que para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq$ j se x_i^* é inteiro não negativo e excede seu limite superior, então nenhum x_j^* excederá seu limite pois do contrário a soma teria um resultado maior que 10 (se $x_1^* \geq 6$, então $x_2^* \not\geq 7$, pois senão a soma destas variáveis excederia o limite 10). Portanto, calcularemos o número de soluções da equação subtraindo do número de equações inteiras não negativas as soluções onde alguma das variáveis excede seu limite superior.

   Se x_1^* excede seu limite superior temos $x_1^* \geq 6$. Tomando $x_1' = x_1^* - 6$, temos $x_1' + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 4$, conseqüentemente, $CR_4^4 = C(4 + 4 - 1, 4)$ $= C(7, 4) = 35$ soluções inteiras não negativas de $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* =$ 10, onde $x_1 \geq 6$.

   Analogamente, teremos $CR_4^3 = C(6, 3) = 20$ soluções com $x_2^* \geq 7$; CR_4^2 $= 10$ com $x_3^* \geq 8$ e $CR_4^1 = 4$ com $x_4^* \geq 9$.

O total de soluções inteiras não negativas e sem restrições para $x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^* = 10$ é $CR_4^{10} = C(4+10-1, 10) = 286$.

Seja S o total de soluções que desejamos calcular. Pelo princípio aditivo:

$$\begin{aligned} S &= 286 - 35 - 20 - 10 - 4 \\ S &= 217 \end{aligned}$$